**Теоретические сведения**

**Высказывание** - это утверждение об объектах, имеющее однозначный, точно определенный смысл. Некоторые высказывания являются **истинными**, некоторые - **ложными**. Истинность либо ложность высказывания не всегда легко установить, это нужно доказать. К тому же, они могут зависеть от времени и места. Часто высказывания говорят не о единичном факте, а о целом множестве утверждений.

Выражения, с помощью которых записываются высказывания на формальном языке называются **логическими формулами**. Более сложные формулы строятся из простых. Для образования новых формул из имеющихся используются **логические связки**. Логические связки применяются к высказываниям и в результате дают высказывание. Рассмотрим общепринятые логические связки:

* [отрицание ( НЕ )](http://techn.sstu.ru/kafedri/%D0%BF%D0%BE%D0%B4%D1%80%D0%B0%D0%B7%D0%B4%D0%B5%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F/1/MetMat/shaturn/logic/theory/th_1_2/oper1.htm)
* [конъюнкция ( И )](http://techn.sstu.ru/kafedri/%D0%BF%D0%BE%D0%B4%D1%80%D0%B0%D0%B7%D0%B4%D0%B5%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F/1/MetMat/shaturn/logic/theory/th_1_2/oper2.htm)
* [дизъюнкция ( ИЛИ )](http://techn.sstu.ru/kafedri/%D0%BF%D0%BE%D0%B4%D1%80%D0%B0%D0%B7%D0%B4%D0%B5%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F/1/MetMat/shaturn/logic/theory/th_1_2/oper3.htm)
* [импликация ( СЛЕДУЕТ )](http://techn.sstu.ru/kafedri/%D0%BF%D0%BE%D0%B4%D1%80%D0%B0%D0%B7%D0%B4%D0%B5%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F/1/MetMat/shaturn/logic/theory/th_1_2/oper4.htm)
* [эквивалентность ( РАВНОСИЛЬНО )](http://techn.sstu.ru/kafedri/%D0%BF%D0%BE%D0%B4%D1%80%D0%B0%D0%B7%D0%B4%D0%B5%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F/1/MetMat/shaturn/logic/theory/th_1_2/oper5.htm)

### ***Логическая связка НЕ***

Утверждение "не А" (отрицание) символически записывается ¬ А или Ā.

Эта же связка применяется при переводе выражений:

* А неверно
* неверно, что А
* A ложно
* A не может быть и т.п.

Ā истинно, когда ложно А, и ложно, когда истинно А.

**Пример.**

|  |  |
| --- | --- |
| А | Ā |
| Сегодня хорошая погода | Неверно, что сегодня хорошая погода |
| Я боюсь зубного врача | Я не боюсь зубного врача |
| Все числа - четные | Не все числа четные |
| 101 - простое число | 101 не может быть простым числом |
| Робин Гуд - разбойник | Робин Гуд - не разбойник |

### ***Логическая связка И***

Союзу "и" сопоставляется логическая связка A & B - конъюнкция.

Эта связка применяется при переводе на формальный язык утверждений вида:

* А и В
* А, но и В также
* А вместе с В
* А, несмотря на В
* не только А, но и В
* как А, так и В
* А, хотя и В и т.п.

Все они переводятся одинаково. Разные слова здесь выражают разное отношение к факту, но не меняют самого факта. Соответственно, переводя A & B на естественный язык, нужно выбирать подходящий, наиболее выразительный вариант.

Утверждение A & B истинно в том и только в том случае, когда истинны как А, так и В, и ложно во всех остальных случаях.

Заметим, что уже для этой простейшей связки ее математический смысл не всегда совпадает с содержательным. В самом деле, математически A & B = B & A. А содержательно, скажем, высказывания "*Я пойду в театр и встречу друга*" и "*Я встречу друга и пойду в театр*" понимаются несколько по-разному. Естественный язык выражает идею временного и причинного следования.

**Пример.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| А | B | A & B |
| Число 2 - четное | Число 2 - простое | Число 2 четное и простое |
| 3 < 6 | 6 < 8 | 3 < 6 < 8 |
| Все волки серы | Все зайцы серы | Все волки и зайцы серы |
| 6 делится на 2 | 6 делится на 3 | 6 делится как на 2, так и на 3 |
| Робин Гуд - разбойник | Робин Гуд - добрый | Робин Гуд был добрым, хотя и разбойником |

### ***Логическая связка ИЛИ***

Связка "или" символически записывается A V B - дизъюнкция. Эта же связка применяется при переводе утверждений вида:

* А или В или оба вместе
* либо А, либо В и т.п.

Дизъюнкция высказываний считается истинной, если хотя бы одно из двух составляющих утверждений истинно, и ложным лишь тогда, когда они оба ложны.

В естественном языке "или" иногда используется как разделительная связка: то или другое, но не оба вместе.

Чаще всего две возможности А и В просто несовместимы, и оба смысла совпадают. В этом случае А и В называют альтернативами.

**Пример.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| А | B | A V B |
| Завтра будет контрольная | Завтра будет самостоятельная | Завтра будет контрольная или самостоятельная |
| 3 < 6 | 3 = 6 | 3 ≤ 6 |
| Данный четырехугольник является прямоугольником | Данный четырехугольник является ромбом | Данный четырехугольник является прямоугольником или ромбом |
| В треугольнике АВС угол А острый | В треугольнике АВС угол В острый | В треугольнике АВС угол А или угол В острый |
| Робин Гуд - разбойник | Робин Гуд - добрый | Робин Гуд был добрым или разбойником |

### ***Логическая связка СЛЕДУЕТ (ЕСЛИ, ТО)***

"Из А следует В" символически записывается А → В. Знак → называется импликацией. Другими вариантами содержательных утверждений точно так же переводящихся, служат:

* А достаточное условие для В
* В необходимое условие для А
* А, только если В
* В, если А
* в случае А выполнено и В
* А есть В

Импликация высказываний ложна только в том случае, когда первое из простых высказываний истинно, а второе ложно.

Употребление грамматической связки "если, то" в математической логике отличается от употребления ее в обычной речи, где, как правило, считается, что, если высказывание А ложно, то высказывание "если А, то В" вообще не имеет смысла. Кроме того, строя предложение вида "если А, то В" в обыкновенной речи, всегда подразумевается, что предложение В вытекает из предложения А.

Употребление этой связки в математической логике не требует этого, поскольку в математической логике смысл высказываний не рассматривается, а рассматривается лишь их логическое значение.

**Пример.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| А | B | A → B |
| Число 12 делится на 6 | Число 12 делится на 3 | Если число 12 делится на 6, то оно делится на 3 |
| Три прямые попарно пересекаются | У трех прямых есть общая точка | Если три прямые попарно пересекаются, то у них есть общая точка |
| Последовательность ограничена | Последовательность имеет предельную точку | Если последовательность ограничена, то она имеет предельную точку |
| В треугольнике АВС угол А острый | В треугольнике АВС угол В острый | Если в треугольнике АВС угол А, то угол В тоже острый |
| Робин Гуд - разбойник | Робин Гуд - добрый | Робин Гуд был разбойником, только если он был добрым |

### ***Логическая связка ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА***

Эта связка символически записывается А ↔ В. Знак ↔ называется эквивалентностью. Этой связкой переводятся предложения:

* А тогда и только тогда, когда В;
* А эквивалентно В;
* А необходимое и достаточное условие для В;
* если А, то и В, и наоборот и т.п.

Эквивалентность истинна тогда и только тогда, когда истинностные значения А и В совпадают, и ложна тогда и только тогда, когда истинностные значения различны.

**Пример.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| А | B | A↔ B |
| Число 12 делится на 6 | Число 12 делится на 3 | Число 12 делится на 6 тогда и только тогда, когда оно делится на 3 |
| Некоторый параллелограмм - ромб | Диагонали некоторого параллелограмма взаимно препендикулярны | Для того, чтобы некоторый параллелограмм был ромбом, необходимо и достаточно, чтобы его диагонали были взаимно препендикулярны |
| Поезд прибывает | Путь открыт | Поезд прибывает, если и только если путь открыт |
| В треугольнике АВС угол А острый | В треугольнике АВС угол В острый | В треугольнике АВС угол А острый в том и только в том случае, если угол В тоже острый |
| Робин Гуд - разбойник | Робин Гуд - добрый | Если Робин Гуд - разбойником, то он был добрый, и наоборот |

## *Задачи для самостоятельного решения*

1. Установите, какие из следующих предложений являются логическими высказываниями, а какие – нет. Укажите, какие из высказываний предыдущего упражнения истинны, какие — ложны, а какие относятся к числу тех, истинность которых трудно или невозможно установить.
   1. Солнце есть спутник Земли.
   2. 2 + 3 = 4.
   3. Сегодня отличная погода.
   4. В романе Л.Н. Толстого "Война и мир" 3 432 536 слов.
   5. Санкт-Петербург расположен на Неве.
   6. Музыка Баха слишком сложна.
   7. Первая космическая скорость равна 7.8 км/сек.
   8. Железо — металл.
   9. Если один угол в треугольнике прямой, то треугольник будет тупоугольным.
   10. Если сумма квадратов двух сторон треугольника равна квадрату третьей, то он прямоугольный.
   11. Волга впадает в Каспийское море.
   12. По словам Сталина, Троцкий был врагом СССР.
   13. Все волки млекопитающие.
   14. Всякий человек имеет брата.
   15. Пейте томатный сок!
   16. 23 < 5.
   17. Который час?
   18. Ни один человек не весит больше 1000 кг.
   19. Курица не птица.
   20. Студент университета.
2. Приведите примеры истинных и ложных высказываний:
   1. из арифметики;
   2. из физики;
   3. из биологии;
   4. из информатики;
   5. из геометрии;
   6. из жизни.
3. Сформулируйте отрицания следующих высказываний:
   1. Эльбрус — высочайшая горная вершина Европы;
   2. 2 >= 5;
   3. 10 < 7;
   4. все натуральные числа целые;
   5. через любые три точки на плоскости можно провести окружность;
   6. теннисист Сафин не проиграл финальную игру;
   7. мишень поражена первым выстрелом;
   8. это утро ясное и теплое;
   9. число n делится на 2 или на 3;
   10. этот треугольник равнобедренный и прямоугольный;
   11. на контрольной работе каждый студент писал в своей тетради;
   12. Маша любит кашу;
   13. Маша любит Сашу;
   14. все свиньи прожорливы;
   15. логика часто ставит меня в тупик;
   16. собаки всегда умнее кошек;
   17. некоторые прямые параллельны;
   18. некоторые мюмзики не куздры;
   19. кошки бывают только белые и серые;
   20. не все то золото что блестит.
4. Определите, какие из высказываний в следующих парах являются отрицаниями друг друга, а какие нет:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1). | 5 < 10 | 5 > 10 |
| 2). | 10 > 9 | 10 <= 9 |
| 3). | мишень поражена первым выстрелом | мишень поражена вторым выстрелом |
| 4). | машина останавливалась у каждого из двух светофоров | машина не останавливалась у каждого из двух светофоров |
| 5). | человечеству известны все планеты Солнечной системы | в Солнечной системе есть планеты, неизвестные человечеству |
| 6). | существуют белые слоны | все слоны серые |
| 7). | кит – млекопитающее | кит – рыба |
| 8). | неверно, что точка *А* не лежит на прямой *а* | точка *А* лежит на прямой *а* |
| 9). | прямая *а* параллельна прямой *b* | прямая *a* перпендикулярна прямой *b* |
| 10). | этот треугольник равнобедренный и прямоугольный | этот треугольник не равнобедренный или он не прямоугольный |

1. Определите значения истинности высказываний:
   1. наличия аттестата о среднем образовании достаточно для поступления в институт;
   2. наличие аттестата о среднем образовании необходимо для поступления в институт;
   3. если целое число делится на 6, то оно делится на 3;
   4. подобие треугольников является необходимым условием их равенства;
   5. подобие треугольников является необходимым и достаточным условием их равенства;
   6. треугольники подобны только в случае их равенства;
   7. треугольники равны только в случае их подобия;
   8. равенство треугольников является достаточным условием их подобия;
   9. для того чтобы треугольники были неравны, достаточно, чтобы они были неподобны;
   10. для того чтобы четырёхугольник был квадратом, достаточно, чтобы его диагонали были равны и перпендикулярны;
   11. Москва – столица России;
   12. Луна – спутник Марса;
   13. кислород – газ;
   14. сегодня плохая погода;
   15. если в треугольнике все углы равны, то он равносторонний;
   16. чтобы прийти на свадьбу, необходимо приглашение жениха или невесты;
   17. некоторые числа четные;
   18. ни у одной ящерицы нет волос;
   19. некоторые подушки мягкие;
   20. Кондрат поехал в Ленинград.
2. Пусть *a* = "это утро ясное", а *b* = "это утро теплое". Выразите следующие формулы на обычном языке:
3. http://techn.sstu.ru/kafedri/%D0%BF%D0%BE%D0%B4%D1%80%D0%B0%D0%B7%D0%B4%D0%B5%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F/1/MetMat/shaturn/logic/tasks/im1.gif;
4. http://techn.sstu.ru/kafedri/%D0%BF%D0%BE%D0%B4%D1%80%D0%B0%D0%B7%D0%B4%D0%B5%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F/1/MetMat/shaturn/logic/tasks/im2.gif;
5. http://techn.sstu.ru/kafedri/%D0%BF%D0%BE%D0%B4%D1%80%D0%B0%D0%B7%D0%B4%D0%B5%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F/1/MetMat/shaturn/logic/tasks/im3.gif;
6. http://techn.sstu.ru/kafedri/%D0%BF%D0%BE%D0%B4%D1%80%D0%B0%D0%B7%D0%B4%D0%B5%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F/1/MetMat/shaturn/logic/tasks/im4.gif;
7. http://techn.sstu.ru/kafedri/%D0%BF%D0%BE%D0%B4%D1%80%D0%B0%D0%B7%D0%B4%D0%B5%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F/1/MetMat/shaturn/logic/tasks/im5.gif;
8. http://techn.sstu.ru/kafedri/%D0%BF%D0%BE%D0%B4%D1%80%D0%B0%D0%B7%D0%B4%D0%B5%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F/1/MetMat/shaturn/logic/tasks/im6.gif;
9. http://techn.sstu.ru/kafedri/%D0%BF%D0%BE%D0%B4%D1%80%D0%B0%D0%B7%D0%B4%D0%B5%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F/1/MetMat/shaturn/logic/tasks/im7.gif;
10. http://techn.sstu.ru/kafedri/%D0%BF%D0%BE%D0%B4%D1%80%D0%B0%D0%B7%D0%B4%D0%B5%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F/1/MetMat/shaturn/logic/tasks/im8.gif;
11. http://techn.sstu.ru/kafedri/%D0%BF%D0%BE%D0%B4%D1%80%D0%B0%D0%B7%D0%B4%D0%B5%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F/1/MetMat/shaturn/logic/tasks/im9.gif;
12. http://techn.sstu.ru/kafedri/%D0%BF%D0%BE%D0%B4%D1%80%D0%B0%D0%B7%D0%B4%D0%B5%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F/1/MetMat/shaturn/logic/tasks/im10.gif;
13. http://techn.sstu.ru/kafedri/%D0%BF%D0%BE%D0%B4%D1%80%D0%B0%D0%B7%D0%B4%D0%B5%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F/1/MetMat/shaturn/logic/tasks/im11.gif;
14. http://techn.sstu.ru/kafedri/%D0%BF%D0%BE%D0%B4%D1%80%D0%B0%D0%B7%D0%B4%D0%B5%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F/1/MetMat/shaturn/logic/tasks/im12.gif.
15. В следующих предложениях вместо многоточия поставьте связки «необходимо, но недостаточно», или «достаточно, но не необходимо», или «не необходимо и недостаточно», или «необходимо и достаточно» так, чтобы получились истинные утверждения:
    1. для того чтобы четырехугольник был прямоугольником, … … …, чтобы длины его диагоналей были равны;
    2. для того чтобы матрица имела обратную, … … …, чтобы ее определитель был равен нулю;
    3. для того чтобы определитель матрицы был отличен от нуля, … … …, чтобы эта матрица имела обратную;
    4. для того чтобы определитель матрицы был равен нулю, … … …, чтобы эта матрица не имела обратной;
    5. для того чтобы матрица имела обратную, … … …, чтобы ее определитель не был равен нулю;
    6. для того чтобы определитель матрицы был равен нулю, … … …, чтобы эта матрица не имела обратной.